Marmolejo, G. 2010. La visualización en los primeros ciclos de la educación básica. Posibilidades y complejidad. Revista Sigma, 10 (2). Pág. 10-26
http://revistasigma.udenar.edu.co/articulos/Volúmen X 2/2.pdf

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen X Nº 2 (2010), páginas 10-26

La visualización en los primeros ciclos de la educación básica. Posibilidades y complejidad

Gustavo Adolfo Marmolejo[1]

Abstract. This paper attempts to attract attention about the complexity that is seeing in the geometric figures, matter that is far from being obvious and spontaneous for our students, even for some of their educators. Equally, it proposes to highlight the opportunities in the learning of the mathematics for students who have studied the heuristic possibilities that the figures offer in the understanding of mathematical tasks.

Keywords. Visualization, Figures, Operations, Areas, Fractions.

Resumen. Este artículo llama la atención sobre la complejidad que suscita ver en las figuras geométricas, asunto que está lejos de ser obvio y espontáneo para nuestros estudiantes, aún para algunos de sus educadores. Igualmente, propone resaltar las oportunidades que en el aprendizaje de las matemáticas tienen los alumnos que han estudiado las posibilidades heurísticas que brindan las figuras.

Palabras Clave. Visualización, Figuras, Operaciones, Áreas, Fracciones.

1. La geometría desde un punto de vista semiótico y cognitivo

Uno de los campos de conocimiento en los que ha sido más notorio el bajo nivel de logros, en la educación básica y media, es el relativo a las matemáticas. La precariedad de estos resultados tiene que ver, entre otros factores, con el hecho de que hay por lo menos dos características típicas de la actividad cognitiva propia de los procedimientos matemáticos que marcan una diferencia con la actividad cognitiva para el aprendizaje de otras disciplinas. En primer lugar se recurre a varios registros de representación[2] , algunos de los cuales han

[1] Universidad de Nariño, Departamento de Matemáticas y Estadística

[2] Un sistema de signos se constituye en un registro de representación cuando permite cumplir las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación: 1°, constituir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado. 2°, transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iníciales. Y 3°, convertir las representaciones dadas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas al objeto que se representa (Duval, 1999)

sido desarrollados específicamente para efectuar tratamientos matemáticos (Duval,1999); por otra parte, los objetos matemáticos nunca son accesibles por la percepción, como podrían serlo la mayoría de los objetos de otras disciplinas (Duval, 1999): tienen la característica de no poder ser asequibles de una forma directa sino a través de sus representaciones. Esto lleva a que en el aprendizaje de las matemáticas, los alumnos tengan dificultades y encuentren obstáculos al confundir la representación con lo representado. Este documento se inscribe en una perspectiva semiótica que considera que el aprendizaje y la comprensión de las matemáticas pasa por la distinción que se haga entre el objeto y su representación, por la movilización de diferentes tipos de registros de representación semióticos y por una debida coordinación entre los sistemas semióticos que el conocimiento matemático moviliza.
La geometría es una de las partes de las matemáticas que genera una particular preocupación en los educadores matemáticos, dado su abandono como objeto de estudio en los currículos escolares desde la segunda mitad del siglo XX (entre 1960 y 1980). Tal como señala Villani 1998, esto se ve reflejado en las encuestas nacionales e internacionales que evalúan los conocimientos matemáticos de los estudiantes: en ellas, la geometría es con frecuencia totalmente ignorada o incluyen muy pocos ítems de geometría. En algunos casos, las preguntas tienden a ser confinadas a algunos "hechos.elementales sobre figuras simples y sus propiedades; aún así, el desempeño de los estudiantes que se reporta, es relativamente pobre. El movimiento de las "matemáticas modernas", basado en la suposición de que ciertas partes de la geometría elemental estaban "muertas"para la investigación contemporánea avanzada contribuyó, al menos indirectamente, a disminuir el rol de la geometría en la educación, favoreciendo otros aspectos de las matemáticas y otros puntos de vista para su enseñanza (Kline, 1986): se dio una presión general en el currículo matemático contra tópicos tradicionales, debido a la introducción de otros nuevos como la teoría de conjuntos, el simbolismo moderno, las estructuras algebraicas, sistemas axiomatizados, etc.

Actualmente existe en la comunidad matemática internacional una amplia convergencia de opinión en que la geometría, después de años de abandono, debiera ser revitalizada en sus variados aspectos en todos los niveles escolares. No obstante, es utópico, y hasta cierto punto indeseable, pensar que la geometría ocupe ahora un tiempo análogo al que antaño se le dedicaba en las instituciones educativas. Hace 50 años, por ejemplo, en Colombia para la enseñanza de la geometría se dedicaban 5 de las 10 horas semanales asignadas a las matemáticas. En la actualidad son muchos los objetos, propiedades y relaciones matemáticas a reflexionar en las aulas escolares; en contraste, los tiempos asignados cada vez son menores. En la búsqueda de caminos que permitan revitalizar la geometría como objeto de estudio es indispensable, pues, vencer estas dificultades de orden temporal.

Otro aspecto que ha llevado a que esta disciplina haya sido relegada en los currículos escolares, se relaciona con la naturaleza de la actividad cognitiva que la geometría exige para su aprendizaje,

> La actividad matemática en los cursos de geometría se realiza en dos registros: el de las figuras y el de la lengua natural. Uno para designar las figuras y sus propiedades; el otro, para enunciar las definiciones, los teoremas, las hipótesis... Pero no se trata simplemente de un cambio de registro... los tratamientos efectuados separada y alternativamente en cada uno de los dos registros no bastan para que este proceso llegue a algún resultado; es necesario que los tratamientos figurales y discursivos se efectúen simultáneamente y de manera interactiva. La originalidad de los procesos de geometría con otras formas de actividad matemática, tiene que ver con que es absolutamente necesaria la coordinación entre los tratamientos específicos al registro de las figuras y los del discurso teórico en lengua natural (Duval, 1999, p.147)

Pero, la mayoría de los estudiantes se encuentran muy lejos de alcanzar dicha coordinación. Varias investigaciones han mostrado que uno de los mayores problemas en la enseñanza de la geometría es que muy pocos alumnos logran la coordinación necesaria entre los tratamientos figurales y los tratamientos discursivos, incluso después de la educación básica y media (Duval, 1999). Una de las razones que explica esta deficiencia tiene que ver con la naturaleza de estos registros, que no son exclusivos de las matemáticas. Los tratamientos figurales parecen proceder de leyes de organización de la percepción visual, y la práctica de un discurso teórico parece ser la prolongación directa de la comprensión inmediata de la lengua utilizada para comunicar (Duval, 1999). En consecuencia, existe la creencia de que hay una proximidad entre los tratamientos que son naturales en cada uno de estos dos registros y aquellos que la actividad matemática solicita; sin embargo, este resulta ser un fenómeno de falsa proximidad.

> ... entre todos los tratamientos que espontáneamente hacen los sujetos en esos dos registros, cuando se está en el ámbito de las matemáticas, algunos se utilizan ocasionalmente y otros se rechazan sistemáticamente. Así, por ejemplo, a veces parece convergir una interpretación perceptiva cuasi-automática de las figuras con la interpretación matemática pertinente, pero con frecuencia también está en divergencia. Pero no hay ningún índice perceptivo que permita distinguir, o prever, los casos de convergencia o de divergencia. De otro lado, la utilización de la lengua natural en las matemáticas proviene de un empleo especializado y no de un empleo común. (Duval, 1999, pp. 147-148)

Pues, ¿cómo lograr que la geometría ocupe un lugar importante en la enseñanza de las matemáticas?, ¿cómo lograr que los estudiantes discriminen entre las diferentes posibilidades que brindan los registros de las figuras y de la lengua natural aquellos tratamientos que son exigidos en el aprendizaje de la geometría?, ¿cómo podría darse una enseñanza de la geometría para que los alumnos alcancen una adecuada coordinación entre estos dos registros? Las investigaciones realizadas por Raymond Duval (1998) aportan un importante marco conceptual para el análisis que puede acercar respuestas tentativas a los cuestionamientos planteados:

- Teniendo en cuenta que los objetos matemáticos tienen la característica de no ser sensorialmente accesibles, su aprendizaje ha de pasar, necesariamente, por los tratamientos propios a cada uno de los registros de representación semiótica en los cuales ellos existen. Para el caso de la geometría, los registros de la lengua natural y el de las figuras, como mínimo.
- El aprendizaje de los tratamientos propios a cada uno de estos dos registros de representación semiótica se ha de realizar por separado.
- Respecto a la lengua natural, es necesario hacer explícito en el currículo escolar un trabajo de diferenciación entre la organización discursiva propia de un razonamiento tipo argumentativo y uno deductivo.
- Y con respecto a las figuras, también ha de hacerse explícito un trabajo que lleve a diferenciar entre los diferentes procesos de visualización que este registro permite.
- Teniendo en cuenta las características epistemológicas de la visualización, en relación a las del razonamiento y la construcción, esta se impone como la actividad cognitiva a privilegiar en la enseñanza de la geometría en los primeros grados de la enseñanza de la geometría.

2. Figuras y visualización

Con el objeto de especificar la complejidad que subyace a ver en matemáticas es necesario, en primera instancia, establecer una clara diferencia entre dos maneras de ver de naturaleza distinta: la primera relacionada con la discriminación perceptual del mundo físico (visión) y la segunda propia de la comprensión de las matemáticas (visualización). Posteriormente, nuestra atención recaerá en discriminar los distintos tipos de aprehensión que permiten las figuras.

2.1. Visión y visualización:

El aprendizaje de los objetos, propiedades y relaciones matemáticas exige la puesta en juego de una serie de registros de representación. Por un lado, las escrituras aritmética y algebraica, la lengua natural y el discurso matemático, de otro, los gráficos cartesianos, las tablas, esquemas y figuras, se imponen como los registros de mayor presencia en las matemáticas básicas. La visualización, en cada uno de los registros del segundo grupo, juega un papel determinante en el aprendizaje de las matemáticas. El aprendizaje de las matemáticas, pues, pasa necesariamente por una serie de registros de representación, es decir, los elementos de reflexión de esta disciplina son asequibles únicamente a través de representaciones, nunca de forma directa, como sí suele suceder en el aprendizaje de los objetos tratados en otras disciplinas. Por lo tanto, el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas moviliza formas de ver de naturaleza diferente a las privilegiadas en las demás disciplinas. No vemos en una figura geométrica o en una tabla o en un gráfico como se hace sobre un esqueleto al estudiar los huesos humanos o al analizar las propiedades de una gota de sangre en el laboratorio. Reconocer la complejidad cognitiva que subyace al aprendizaje de la visualización en el estudio de las matemáticas exige tener en cuenta una clara diferenciación y separación entre dos actos cognitivos de naturaleza diferente: la visión (percepción de objetos físicos) y la visualización (percepción de representaciones).

El propósito de la visión es permitir una aprehensión simultánea (tomar en conjunto y en un único acto los múltiples elementos del campo percibido, así como sus relaciones), inmediata (permitir discriminar e identificar rápidamente los múltiples elementos del campo y sus relaciones) y directa (se focaliza directamente sobre el objeto en cuestión). "En este sentido ´ver‘ los objetos que nos rodean es siempre reconocer alguna cosa al primer golpe de ojo"(Duval, 2003, p.45). En lo que respecta a la visualización, su característica apunta a "producir una representación que dé lugar a una aprehensión simultánea y casi inmediata, pero sin que esta representación constituya una aprehensión de los objetos representados"(Duval, 2003, p.45). De esta manera sobresalen dos rupturas que separan la aprehensión de objetos físicos y la de representaciones. Por una parte, la visualización, a diferencia de la visión, no se desarrolla en un espacio tridimensional real, por el contrario, se proyecta sobre dos dimensiones. Ver en matemáticas exige, por tanto, pasar de ver en 3D a hacerlo en 2D, de otra parte, "la visualización permite asociar formas a los objetos donde la ´juxtaposición‘ retomando el termino de Kant, es imposible de observar en la realidad"(Duval, 2003, p.46).

En este sentido visualizar es la acción de,

> . . . producir una representación que, en ausencia de toda percepción visual de los objetos representados, permite mirarlos como si estuvieran verdaderamente delante de los ojos. La visualización debe entonces permitir distinguir e identificar, ya sea a primer golpe de ojo (aprehensión vista como inmediata) o sea de un sólo golpe de ojo (aprehensión simultánea) lo que se representa. . . (Duval, 2003, P.42).

No obstante, es vital tener en cuenta que la visualización en matemáticas moviliza una aprehensión sobre las figuras que exige poner en juego algo más que una simple relación de similitud con objetos reales 3D/3D, ya sea a través de sus contorno o por medio de la disposición de elementos característicos de un todo o de un conjunto (Duval, 2003). Es decir, no basta con una visualización icónica para comprender el papel que juegan estas representaciones en el aprendizaje de las matemáticas. La **visualización matemática** en palabras de Duval (2003) **exige**, al contrario:**1) la puesta en evidencia de las relaciones existentes entre las unidades de las figuras en cuestión (puntos, trazos, contornos. . .); 2) la capacidad de producción, pues, las figuras geométricas son construcciones realizadas a partir de propiedades y/o reglas; y 3) una articulación con un vocabulario técnico dado en el registro de la lengua natural**. En este sentido, una marcada separación entre estos dos tipos de visualización es también indispensable en aras de reconocer la complejidad que significa ver en matemáticas. Pues, hay una enorme brecha entre el reconocimiento icónico de las formas euclidianas elementales que se privilegia en una visualización de tipo icónico y el movilizado en las tareas propias de las matemáticas (Duval, 2003). Una figura geométrica en matemáticas "consiste siempre en una configuración de varias formas y la mirada matemática sobre una figura no se reduce jamás a una simple percepción visual sino a la coordinación con otros tipos de aprehensión"Duval (2003, p. 52).

La importancia de las figuras geométricas radica en el hecho de que forman un importante soporte intuitivo para el desarrollo de las actividades geométricas, es decir, dejan ver mucho más de lo que los enunciados dicen, permiten la ilustración de proposiciones, la exploración heurística de situaciones complejas, posibilitan "vistazos"sinópticos sobre ellas y verificaciones subjetivas. En fin, permiten en la resolución de un problema o en la búsqueda de una demostración, la conducta de abducción consistente en delimitar de entrada la clase de hipótesis o alternativas que han de considerarse. Hablar del papel heurístico de las figuras alude a que es la conducta de abducción la que guía la deducción. Sin embargo, en el momento en que los alumnos deben desarrollar situaciones donde las figuras juegan este papel, se observa que ellos se encuentran bastante lejos de poder acceder a sus enormes posibilidades y en muchos casos, por el contrario, le asocian propiedades que no le corresponden o llegan incluso a no ver nada significativo en ellas.

Lo anterior se pone de relieve en los resultados obtenidos en Marmolejo (2007) donde se puso en juego una serie de situaciones de aula, con alumnos del grado tercero de cuatro instituciones educativas de la ciudad de Cali (Colombia). Para su resolución, cada una de estas situaciones exigía tener en cuenta las posibilidades heurísticas permitidas por el registro de representación semiótico de las figuras. En los procedimientos explicitados por los alumnos se observó que un porcentaje muy alto de la población participante, tiene un casi total desconocimiento de los tratamientos permitidos por las figuras. En aquellos casos donde se hizo uso de este recurso, los alumnos accedieron a las posibilidades figurales pero en su más baja racionalidad. Respecto al primer caso se identificó, entre otros aspectos, que para la mayoría de los alumnos participantes las figuras tienen un carácter estático, es decir, para ellos hay un total desconocimiento de que la organización perceptiva de una figura puede ser cambiada mediante la introducción física o mental de trazos y que de esta manera se puede dar lugar a nuevas sub-figuras o inhibir las ya dadas. También se identificó en casi la totalidad de los alumnos participantes un gran desconocimiento en cuanto a las posibilidades que tiene una figura de ser dividida en las diferentes sub-figuras que la componen y que ellas sean susceptibles de ser trasladadas y/o rotadas tanto al interior de la figura como al exterior de esta. De igual manera se observó una total ignorancia respecto a que mediante estas transformaciones la figura de partida puede ser convertida en otra de contorno global diferente; en consecuencia, resultó imposible discriminar entre las diferentes posibilidades de transformación de una figura, aquellas potentes y pertinentes al problema planteado.

2.2. Tipos de Aprehensión figural:

Para describir cuál es el aporte heurístico de una figura en el desarrollo de una actividad matemática se debe distinguir el tipo de aprehensión susceptible de sugerir la solución al problema planteado Duval (1995). Una figura puede dar lugar a aprehensiones de naturaleza diferente Duval (1995) y en algunos casos estas formas de discriminación se subordinan unas a las otras, se relacionan y, en otros, se oponen (Duval, 2003). Las investigaciones adelantadas por Duval (1995) han permitido discriminar la presencia de cuatro diferentes tipos de aprehensión posibles sobre una figura: perceptual, operatoria, discursiva y secuencial. Las tres primeras se relacionan con la visualización, la cuarta, por el contrario, con el proceso de construcción o de descripción de la construcción de una figura (Duval, 1995). A continuación describimos cada una de las aprehensiones que se relacionan con la actividad cognitiva de interés en el artículo:

Aprehensión Perceptiva:
En este nivel se reconocen, de manera automática e inmediata, las diferentes unidades figurales que son discernibles en una figura dada (Duval, 1999, p. 145). Esta forma de aprehensión está ligada a las leyes gestálticas de organización de la percepción: cuando las unidades figurales de dimensión 2 están separadas, su reconocimiento no tiene ningún tipo de dificultad; pero no sucede lo mismo cuando se encuentran integradas en una configuración. Esto sucede por dos razones diferentes, en primer lugar, algunas unidades figurales de dimensión 2 predominan sobre otras unidades también de dimensión 2, de conformidad con la ley gestáltica de cierre. En segundo lugar, una figura geométrica contiene, con frecuencia, más unidades figurales elementales que las requeridas para construirlas. Este tipo de aprehensión puede tener un rol facilitador o inhibidor en el desarrollo de una tarea (Duval, 1999).

Aprehensión Operatoria:
Las posibilidades de exploración heurística que permiten las figuras y que en gran parte brindan todas las posibilidades que permiten las figuras en el aprendizaje y enseñanza de la geometría, se encuentran íntimamente relacionadas con la gama de modificaciones posibles que se pueden realizar sobre este tipo de representaciones. Las modificaciones que ponen en juego las relaciones existentes entre las partes y el todo son modificaciones mereológicas. Cuando se agranda, disminuye o se deforma la figura inicial, hablamos de modificación óptica, que transforma una figura en otra apelando a su imagen: "esta transformación, que es realizable como un juego de lentes o de espejos, puede conservar la forma de partida o alterarla"(Duval, 1999. p. 62). Por otro lado, también es posible desplazar o rotar tanto la figura de partida como las sub-figuras que la componen, en relación con la orientación del campo en el que se destaca. Cuando esto sucede, hablamos de una modificación posicional.

La aprehensión operatoria de las figuras, pues, es "una aprehensión centrada sobre las modificaciones posibles de una figura de partida y por consiguiente sobre las reorganizaciones perceptivas que estas modificaciones introducen"(Duval, 1999. p.62) de tal forma que haga aparecer un resultado o suscite caer en cuenta en la razón de ese resultado. Por cada modificación existen varias operaciones cognitivas[3] (tabla I) que brindan a las figuras su productividad heurística, es decir, "que haya congruencia entre una de las operaciones y uno de los tratamientos matemáticos posibles del problema propuesto"(Duval, 1999. p.62). Es a partir de las modificaciones que se producen en una figura por la aplicación de una op-

[3] Cada una de estas modificaciones es realizable de forma física, gráfica o mental. El tipo de modificación escogido permite transformaciones de distinta naturaleza en las figuras, cuyo carácter es independiente entre sí.

eración cognitiva determinada que se generan ideas, procesos y posibilidades que permiten reconocer los tratamientos matemáticos que se deben aplicar para resolver la actividad. Son ellas, las operaciones cognitivas, las que constituyen la productividad heurística de las figuras.
Para que los alumnos puedan hacer uso de las potencialidades que brinda el hecho de que una figura juegue un rol heurístico en la resolución de un problema de geometría, no basta que una figura sea productiva heurísticamente, pues, suele suceder que los alumnos no logran ver la operación u operaciones pertinentes en la resolución del problema. Se ha encontrado la existencia de factores que facilitan, o por el contrario, dificultan la visualización tanto de las sub-figuras, como las transformaciones figurales a tener en cuenta en la solución de la problemática planteada (Duval, 1995, 1998; Padilla, 1992, Grenier, 1988 (En Padilla 1992) y Küschemann, 1981 (En Padilla, 1992), Marmolejo, 2007). Además, se ha demostrado que estos factores de visibilidad inciden en los tiempos de respuestas, asunto que resalta en gran manera la complejidad cognitiva que subyace en la visualización al interior del registro semiótico de las figuras (Padilla, 1992). En el caso de la operación de reconfiguración, entre los diferentes factores que minimizan o aumentan la complejidad de ver sobre una figura la aplicación de esta operación se encuentran: que el fraccionamiento adecuado al desarrollo de la tarea propuesta sea dado sobre la figura al inicio o que deba ser encontrado, que el reagrupamiento de las partes en que ha sido dividida la figura forme una configuración convexa o no-convexa, el número de rotaciones o traslaciones de las sub-figuras claves para lograr una adecuada colocación, que una misma parte de una figura deba entrar simultáneamente en dos reagrupamientos intermediarios a comparar, que sólo se deba tener en cuenta las características del contorno de la figura a reconfigurar y que las partes en que está dividida la figura a reconfigurar deban ser desplazadas al interior de la figura de inicio, o al contrario que algunas deban salir fuera de él y la existencia o no de una diferencia entre tono y grosor presente en las unidades de dimensión 1 que constituyen una figura y las líneas que conforman el fondo cuadriculado sobre el cual es representada.

Tipo de modificación Configural	**Operaciones constituyentes de la productividad heurística**
Mereológicas	Reconfiguración
Ópticas	Superponibilidad. Anamorfosis
Posiciónales	Rotación. Traslación

En lo relacionado con las modificaciones posicionales, en particular, en la operación de rotación, diferentes investigaciones ponen en evidencia que la medida del ángulo de rotación con el cual se represente una figura se constituye en un factor de visibilidad que complejiza o ayuda al reconocimiento de una forma en relación a otra. Es el caso del trabajo adelantado por Pellegrino y Kail (citado en Duval, 1999) quienes ponen en evidencia que el tiempo requerido para reconocer una forma aumenta si su representación es realizada en una orientación diferente a la que habitualmente se acostumbra a privilegiar. Por su parte, Shepard y Metzler, (citado en Duval, 1999) muestran que el tiempo de reconocimiento de un mismo objeto, uno presentado rotado en relación al otro, aumenta según el valor del ángulo de rotación.

Reconfiguración y factores de visibilidad: La reconfiguración es la operación de mayor potencia, complejidad e interés en el aprendizaje de la geometría, "es un tratamiento que consiste en la división de una figura en sub-figuras, en su comparación y en su reagrupamiento eventual en una figura de un contorno global diferente"(Duval, 1999, p.156). Interviene en la productividad heurística de las figuras, aprovechar las potencialidades que brindan las figuras en la resolución de problemas geométricos implica que los alumnos logren realizar la o las operaciones de reconfiguración pertinentes a la resolución del problema, las cuales no logran identificar de manera espontánea. Son tres los aspectos que pueden darnos luces para comprender el por qué de esta dificultad:

La única etapa escolar que existe una intencionalidad de enseñanza del registro semiótico de las figuras geométricas es en la etapa preescolar, pero está más orientada al desarrollo de la motricidad fina y al reconocimiento de figuras por parte del alumno, que al desarrollo de algún tipo de racionalidad de orden geométrico. Posteriormente, en los cursos de educación básica, los alumnos deben, a partir de ese reconocimiento visual y de esa actividad motora adquirida, entender todas las posibilidades que brindan las figuras. Por otra parte, en las apuestas de enseñanza privilegiada en los textos escolares de la educación básica, uno de los materiales didácticos de mayor uso en el diseño e implementación de las clases de matemáticas en nuestro país, las figuras y su visualización por lo general juegan un papel secundario, heurísticamente poco productivo (Marmolejo, 2007, Marmolejo y Guzman, 2011).

El segundo aspecto alude a que "las unidades figurales que se han podido identificar perceptivamente no siempre concuerdan con las que están designadas en el enunciado, o con las que son pertinentes para la resolución del problema planteado"(Duval, 1999, p. 160). La no-congruencia entre lo que muestra la introducción discursiva de la figura y lo que se privilegia en su organización perceptiva o, a la inversa, la presencia de una fuerte congruencia entre estos dos aspectos unido a que las unidades que han de considerarse no son las directamente visibles en la figura y designadas en el enunciado, se constituyen, uno y otro, en fuertes obstáculos para la resolución del problema planteado. Por el contrario, la existencia de congruencia y de coincidencia entre las unidades que se evidencian en la figura y el enunciado, con aquellas que es necesario tener en cuenta pone en evidencia un espectacular aumento de éxitos en relación con el desempeño en tareas donde esto no sucede (Duval, 1999).

El tercer aspecto se relaciona con que no basta que un alumno pueda acceder a los diferentes tratamientos que permiten las figuras, es decir, que pueda realizar trazos sobre una figura, dibujar sobre ella sub-figuras, realizar transformaciones y rotaciones, transformar una figura dada en otra figura de contorno global diferente; es también necesario que pueda discriminar aquellas transformaciones que por su naturaleza son pertinentes, potentes y económicas en la solución del problema planteado. Distintas investigaciones han identificado factores que facilitan, o por el contrario, dificultan la visualización tanto de las sub-figuras, como las transformaciones figurales que han de tenerse en cuenta (factores de visibilidad) en la solución del problema plateado (Duval, 1998; Padilla, 1992; Marmolejo y Vega, 2011). Así mismo se ha demostrado que estos factores de visibilidad inciden en los tiempos de respuestas, con lo cual se resalta la complejidad cognitiva que subyace en la visualización al interior del registro semiótico de las figuras (Padilla, 1992). Entre los factores de visibilidad destacan: que la figura de partida sea presentada sobre un fondo cuadriculado o sobre uno no cuadriculado, que el reagrupamiento de las partes en que ha sido dividida la figura forme una configuración convexa o no-convexa, que sea necesario aplicar una o varias operaciones posicionales sobre las sub-figuras claves para lograr una adecuada colocación, que una misma parte de una figura deba entrar simultáneamente en dos reagrupamientos intermediarios que se han de compararse, que sólo se deba tener en cuenta las características del contorno de la figura que han de reconfigurase, que las partes en que está dividida la figura que han de reconfigurarse deban ser desplazadas a su interior, o al contrario que algunas deban desplazarse a su exterior, que el fraccionamiento de la figura que se ha de transformar en las partes claves sea dado de entrada o deba ser introducido.

Aprehensión Discursiva:
La aprehensión discursiva de una figura es inseparable de una doble referencia. Por un lado, a una red semántica de objetos matemáticos y, por otra, a una axiomática local. En este

sentido se dice que está indisociablemente ligada a las aserciones correspondientes del enunciado. Dicho de otro modo, la aprehensión discursiva de una figura privilegia exclusivamente el estatus que el enunciado concede a sus proposiciones. Por tanto, se debe tener en cuenta que las figuras por sí mismas no constituyen un registro de tratamiento autónomo, es decir, no basta con un simple reconocimiento perceptivo en ellas para asignarle propiedades particulares. Por el contrario, la consigna juega un papel determinante, impone de entrada las características matemáticas de la figura. Se pone así en evidencia una condición esencial del registro del registro semiótico de las representaciones figurales, "una figura representa una situación geométrica sólo en la medida en que la significación de ciertas unidades figurales y de algunas de sus relaciones, estén explícitamente fijadas de entrada"(Duval, 1999. P.159), es decir, "la introducción de una figura geométrica necesariamente es discursiva"(Duval, 1999. P.160).

De acuerdo a lo anterior y considerando que la organización perceptiva de una figura privilegia el reconocimiento de unas unidades sobre otras, es importante señalar que raramente las partes a discriminar en una configuración geométrica son del mismo número de dimensión que el de la figura en cuestión. Al ser la figura de dimensión 2, por ejemplo, las unidades a reconocer tienden a ser de dimensión 1 o 0. Esto obliga, a quien ve en la figura, a aplicar un proceso de deconstrucción dimensional (Duval, 2005, pp.16-18) sobre ella. Acción que suscita la aplicación de un cambio dimensional en la forma de ver sobre la figura: pasar de ver en 2 dimensiones a hacerlo en una dimensión. Forma de proceder que va totalmente en contra de los mecanismos de organización perceptiva que se imponen en el reconocimiento de formas.

Esta forma de aprehensión implica una subordinación de lo perceptivo a lo discursivo: las propiedades de las figuras no son impuestas a partir de los trazos y las formas de una figura, sino a partir de las propiedades mencionadas en el enunciado. En relación con la aprehensión operatoria, cuando existe una congruencia entre esta y un tratamiento matemático posible del problema, la aprehensión discursiva puede ser dejada de lado, pero, si no hay congruencia, este tipo de aprehensión es necesaria.

La visualización en matemáticas, un asunto complejo y susceptible de aprendizaje

En lo que sigue se presenta una serie de actividades que hemos utilizado en algunas de nuestras investigaciones (Marmolejo y Vega, 2003, 2011; Marmolejo, 2007), la atención recae en las aprehensiones perceptual y operatoria, las de mayor presencia en la enseñanza de la geometría en la los primeros ciclos de la Educación Básica. Las maneras de proceder de los estudiantes, así como los resultados encontrados ponen en relieve: 1) la enorme complejidad de la visualización que muestra el error de quienes la consideran obvia y espontánea y 2) el reconocimiento de las posibilidades que brinda esta actividad cognitiva para aquellos estudiantes que han participado en espacios de reflexión sobre el papel que juegan las figuras en el aprendizaje de las matemáticas.

La primera actividad muestra la aplicación de dos tipos de aprehensión, por una parte, un exclusivo privilegio de una de naturaleza perceptual, por otra, el paso a otra de característica operatoria. La segunda de las actividades, por su parte, refiere a la complejidad que subyace para muchos estudiantes para vencer algunas de las limitaciones que introduce la aprensión perceptual: pasar de discriminar en una configuración geométrica lo que a primer golpe de "vistaïmpone a establecer mediante la inhibición de trazos y/o sub-figuras la existencia de figuras "escondidas". Por último, la actividad 3 muestra la potente manera de proceder de dos estudiantes que tras haber participado en secuencias de enseñanza sobre la visualización, usan las figuras como soportes heurísticos al desarrollar tareas cuya reflexión se realiza tanto en tiempos, como en objetos matemáticos, distintos a los tratados en el proceso de enseñanza visual.

Actividad 1: el mural del colegio está pintado como se muestra en la Ilustración 1. Si los dibujos fueron pintados con color gris y el resto de la pared con color blanco ¿dónde se gastó mayor cantidad de pintura?

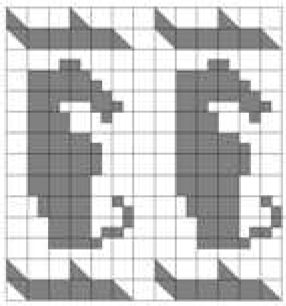

Ilustración 2

Esta actividad se caracteriza por la no existencia de congruencia entre el enunciado en lengua natural y la figura. La consigna, por un lado, introduce en lengua natural un anclaje sobre dos superficies distintas: "Si los dibujos fueron pintados con color gris y el resto de la pared con color blanco". La figura, por su parte, impone la discriminación única de la parte gris[4] , es más, su organización perceptual puede privilegiar, ya sea, la focalización de seis superficies grises independientes entre sí (dos con forma de caballo de mar y cuatro con forma de peces) o, por el contrario, la existencia de un gran número de pequeñas sub-figuras (cuadradas, triangulares, rectangulares) cuya unión le componen[5] . En consecuencia, es necesario neutralizar en la figura su organización perceptiva, pues esta hace predominar los contornos de las figuras "grisesz de los cuadrados pequeños blancos sobre cualquier contorno de las sub-figuras pertinentes a la solución del problema planteado. Posteriormente las sub-figuras deben ser vistas de forma separada debido a que tienen parte de su contorno en común y finalmente centrar la atención en una de ellas.

Esta tarea fue propuesta a 150 estudiantes de cuatro cursos de grado tercero de igual número de instituciones educativas de educación básica de la ciudad Santiago de Cali (Colombia). La población participante se caracterizó por no haber participado en espacios de reflexión sobre las posibilidades que brindan las figuras en el desarrollo de tareas matemáticas y por estar a puertas de iniciar el estudio de medida de áreas, se identificó una alta homogeneidad en la manera de ver privilegiada por los estudiantes al resolver el problema planteado: los alumnos tendieron a ver la figura de manera "cuadriculadaçomo si fuese un mosaico de baldosas unas de forma cuadrada, otras triangular y otras rectangular (Marmolejo y Vega, 2011). Esta forma de ver suscitó en la mayoría de los estudiantes hacer del conteo la única

[4] La organización perceptiva de la figura suscita reconocer en las zonas grises a la figura y en la zona blanca a un fondo sobre el cual la figura se encuentra representada, es decir, se asigna el borde que separa las dos zonas en cuestión sólo a la parte gris, esto debido a que "las zonas grises son más pequeñas que las blancas y están más o menos rodeadas por estas, porque contrastan más intensamente con el blanco de la pagina y porque en nuestra cultura se acostumbra a colorear o dibujar las cosas en negro sobre fondo blanco"(Rock , 1985, 113-114).

[5] La existencia, o no, de un contrate en tono y grosor entre las líneas que constituyen el contorno de las figuras y las que conforman el fondo cuadriculado influye en el tipo de focalización a privilegiar en la figura (Marmolejo y Vega, 2011).

o la más recurrente manera de proceder en el desarrollo de la tarea propuesta, elección que llevó a dejar de lado la figura y las posibilidades que brinda en el desarrollo de la actividad (Marmolejo y Vega, 2011). Veamos algunos aspectos a los que se alude en esta investigación y que ponen en evidencia las dificultades y errores presentados al privilegiar este tipo de visualización en el desarrollar la actividad propuesta:

- Al contar las pequeñas partes que por acción del fondo cuadriculado se encuentra dividida la figura en cuestión, la gran mayoría de los estudiantes ignoraron que algunas de ellas estaban parcialmente coloreadas (p.e. algunos de los cuadrados en que está dividida la figura sólo lo están en la mitad de su superficie, formando así una parte triangular coloreada y otra de igual forma sin colorear), en consecuencia, procedieron a contar las fracciones de cuadrado como si fuesen unidades completas o, por el contrario, las ignoraron y contaron únicamente aquellas que están totalmente recubiertas de color.

- Otros estudiantes, por el contrario, aplicaron una falsa transformación transitoria sobre la figura de partida, es decir, por un lado, si bien el contorno de la figura de partida es transformado, la atención nunca recayó en su transformación global, sino que se focalizó a nivel local: algunas de las pequeñas partes que componen la figura son configuradas (unidas) con otras (de igual forma y cantidad de área) para formar superficies cuadradas que representen en el proceso de resolución a unidades de superficie. Por otra parte, la transformación de la figura es de naturaleza transitoria, pues, una vez realizado el conteo de una nueva unidad de superficie de forma cuadrada, la figura de partida regresa a su forma inicial, quien resuelve la tarea propuesta focaliza de nuevo su atención en otra u otras pequeñas partes de ella y replica el proceso ya empleado. Además, la transformaciones que se realizan sobre la figura de partida no guían la manera de proceder en el desarrollo de la tarea propuesta, al contrario, es el conteo quien guía el proceso de resolución, es la acción de contar la que suscita la focalización en las pequeñas partes y su posterior reconfiguración.

- Algunos estudiantes cuentan uno a uno los cuadrados completos y posteriormente continúan el conteo sobre los incompletos, introduciendo un segundo conteo paralelo: cada cuatro cuadrados pequeños forman un cuadrado completo. Lo anterior conlleva a que además el alumno en su intento de controlar los dos conteos y evitar contar dos o más veces la misma parte, deba introducir signos, colores, tachones y marcas sobre la figura, lo cual disminuye en un alto grado la visibilidad en ella. Ahora, si no lo hace y trata de mantener el control de forma mental está en gran riesgo de contar mal y totalizar erróneamente. Actuar de esta manera desencadenó por lo general procedimientos monótonos, extensos y engorrosos.

- La mayoría de los estudiantes asumieron como unidad de visualización cada uno de los cuadrados que conforman el fondo cuadriculado, manera de ver que suscitó una pérdida de la globalidad de la figura. Es decir, no hay conciencia de la figura como un todo. La totalidad de los procedimientos puestos en juego por los alumnos evidencian notablemente este fenómeno. En su afán de totalizar la cantidad de cuadrados que conforman las partes blancas y grises de la figura dada, parece ser que los alumnos no discriminan en ella la presencia de las 6 sub-figuras superficies están coloreadas de gris: cuatro peces y dos caballos de mar. Tampoco reconocieron que tanto peces como caballos, respectivamente, tienen igual forma y superficie, sino que vieron una serie de cuadrados, unos completos y otros incompletos, unos puestos al lado de otros. Esto impidió que a partir de un reconocimiento global de la figura, pudieran recurrir a ella como un soporte intuitivo que guíe la solución del problema hacia procedimientos de racionalidades mayores a los establecidos con la aplicación exclusiva del conteo, pues, no es necesario realizar un conteo de cada uno de los cuadrados que forman la parte de las zonas grises. Basta con considerar aquellos que conforman uno de los peces y uno de los caballos de mar y mediante tratamientos aritméticos (sumas o multiplicaciones) hallar la totalidad de cuadrados que forman esta parte de la figura. Posteriormente, mediante tratamientos multiplicativos y sustractivos identificar el total de cuadrados que conforman la parte blanca de la figura. Por último, mediante una simple sustracción encontrar el número de unidades de medida que componen cada parte. Este no solamente sería un procedimiento que pone en juego racionalidades de orden superior en los dos registros utilizados, sino que además puede ser más económico y menos engorroso que los privilegiados por los estudiantes participantes en la investigación.

Para terminar es importante señalar la dificultad que presentaron los educadores a cargo de los cursos en que fueron aplicadas estas actividades al acompañar a sus estudiantes en sus intentos por resolver las situaciones. A pesar del trabajo previo de presentación, discusión y análisis de las situaciones con los profesores y el acuerdo para que estas situaciones fueran implementadas como parte integral de enseñanza en la clase de matemáticas, no ocurrió que los maestros pudiesen elaborar un discurso que acompañara y alentara los procedimientos de los alumnos en sus intentos por solucionar los problemas. En resumen, para los maestros, cuando hay figuras no hay necesidad de hablar. Las figuras hablan por sí mismas (Marmolejo y Vega, 2011).

Actividad 2: ¿Cuántos y cuáles cuadrados es posible encontrar en la siguiente configuración (Ilustración 2)?

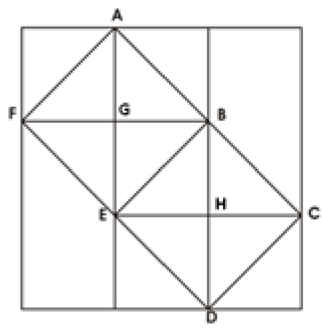

Ilustración 2

Este problema fue propuesto a un grupo de 30 estudiantes de tres instituciones distintas (para mayores detalles ver en Marmolejo, 2007, pp.144-158), para ellos no representó ninguna dificultad discriminar en la

los cinco cuadrados pequeños y el que los contiene, caso contrario sucedió con los cuatro restantes. El nivel de complejidad que subyace a la discriminación de los últimos cuadrados en relación a los primeros fue significativamente alto. Más del 70 % de los estudiantes que intentaron resolver la actividad propuesta consideró que en la configuración representada había 6 cuadrados y sólo iniciaron la búsqueda de los cuatro restantes en el momento en que el investigador indicó la existencia de un número mayor de cuadrados. El costo temporal que representó la búsqueda y discriminación de los cuatro últimos cuadrados, en relación a los primeros fue bastante alto: se invirtió en ella más del doble del tiempo dedicado a la discriminación de los primeros cuadrados.

La complejidad encontrada por los estudiantes participantes en la investigación se explica de la siguiente manera, la organización perceptual de la figura suscita espontáneamente a ver en ella a un mosaico de forma cuadrada compuesto por 11 triángulos y dos trapecios independientes entre sí. Quien resuelve el problema planteado debe neutralizar la organización perceptiva que hace predominar los contornos triangulares y trapezoidales sobre los de forma cuadrada, y ver, de forma separada, unidades figurales de dimensión 1 y dimensión 2 que se recubren parcialmente. En efecto, para desarrollar la situación propuesta se debe discriminar sobre la figura la presencia de 10 configuraciones de forma cuadrada. Al inhibir los segmentos AC, CD, DF, FA y BE en la Ilustración 2, se reconoce la existencia de cinco cuadrados pequeños. Ahora, para hallar los cuadrados ABEF y BCDE no basta con inhibir algunos de los segmentos que constituyen la figura de partida, pues, uno y otro se encuentra rotado en relación a la posición que habitualmente son presentados en textos y aulas escolares. Discriminar sobre la figura los cuadrados AGCE y FBDH cognitivamente se constituye en un asunto de mayor complejidad, pues, ambos cuadrados se recubren entre sí (Obstáculo de desdoblamiento, Padilla, 1922), por tanto, es necesario simultáneamente reconocer la superficie del cuadrado GBHE como parte constituyente de los dos cuadrado buscados, posteriormente debe separar un cuadrado del otro y ver en ellos figuras independientes entre sí. Para reconocer el cuadrado de superficie mayor basta con focalizar la atención de forma global en la configuración y reconocer en él la figura que contiene a todas.

Actividad 3: encuentro 10 números fraccionarios que al mismo tiempo sean mayores que 1/4 y menores que 1/3?

Esta actividad fue propuesta a un grupo de 30 estudiantes de grado quinto de un colegio del sur-occidente colombiano en un proceso de reflexión sobre la relación de orden entre números fraccionarios. Para el desarrollo de la actividad se entregó hojas blancas y los estudiantes fueron divididos en grupos de trabajo de dos y tres integrantes. La totalidad de los estudiantes de este curso habían reflexionado de manera previa al desarrollo de la presente actividad, y en grados anteriores, sobre las posibilidades que brindan las figuras en la movilización de conocimiento matemático. El educador a cargo, igualmente, había participado en cursos de cualificación de maestros encaminados a suscitar en sus prácticas educativas el uso de la visualización (Marmolejo, 2005b).
Todos los grupos de trabajo recurrieron a las figuras como un soporte para intentar resolver la tarea propuesta, únicamente uno de los grupos (grupo G1) puso en evidencia el procedimiento que describiremos a continuación y que se sintetiza en la ilustración 3. Esta manera de proceder fue presentada y sustentada por los dos integrantes del grupo G1 al resto de sus compañeros. Una vez finalizada la exposición todos los grupos de trabajo retornaron al desarrollo de la actividad, el procedimiento mostrado por el grupo G1 fue replicado por cada grupo para encontrar las fracciones solicitadas. Es importante señalar que en una evaluación realizada un mes después, se presentó una tarea similar, todos los estudiantes recurrieron a las figuras para intentar resolver la problemática planteada, la mayoría de ellos logró resolver adecuadamente la tarea propuesta.

A continuación describimos el procedimiento aplicado por los estudiantes que conforman el grupo G1 para resolver la problemática planteada en esta tercera actividad y que pusieron en común ante el resto de compañeros. Bajo el objetivo de representar las fracciones aludidas en la actividad los dos estudiantes representaron dos figuras de forma rectangular congruentes entre sí. Cada una de estas representaciones asumió en el proceso de resolución el rol de figuras de partida. En una de ellas los estudiantes introdujeron cuatro trazos auxiliares (figura representada en la parte superior izquierda en la ilustración 3), para la segunda fueron tres los trazos dibujados (figura representada en la parte superior derecha en la ilustración 3). De esta manera las dos figuras de partida quedaron descompuestas en cuatro y tres partes "iguales", cada una representando respectivamente a una cuarta y a una tercera parte de la superficie de cada figura. Al preguntarse a los estudiantes expositores por qué recurrieron a las figuras para resolver el problema, ellos hicieron saber que la educadora

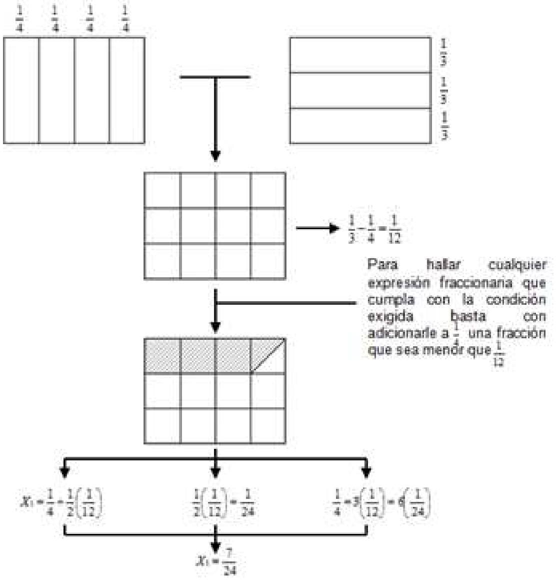

Ilustración 3

a cargo de manera reiterativa y en el desarrollo de sus clases sugería recurrir a las figuras en el desarrollo de las tareas propuestas, en particular, de aquellas que son complejas: "la profesora siempre nos dice que cuando un problema es difícil, las figuras nos pueden ayudar".

Posteriormente, los dos estudiantes manifestaron que "al ver las dos figuras [una descompuesta en cuatro partes, la otra en tres] se les ocurrió juntarles para formar una sólo y ver qué pasaba", de esta manera aplicaron una sobre-posición de una figura en otra, generando una nueva representación cuya organización interna difiere de las dos primeras (figura representada debajo de las dos primeras figuras en la ilustración 3). El fraccionamiento que caracteriza la nueva figura resultó clave para la manera de proceder seguida por estos estudiantes, pues, según ellos, al ver al mismo tiempo en las primeras dos figuras y compararlas con la tercera se dieron cuenta que: 1) la última de las figuras estaba dividida en 12 partes iguales, en consecuencia, cada una de ellas representa 1/12 de la figura; 2) que cada una de las partes en que inicialmente habían dividido las dos figuras de partida podrían verse como una composición de las partes en que se encontraba fraccionada la nueva figura, 3) si una de las partes que representaba a 1/4 de la superficie de la figura estaba compuesta por tres cuadritos y cada uno de ellos representaba a 1/12, entonces, la fracción 1/4 podría ser representada como la fracción tres doceavos, lo mismo para el caso de cualquiera de las partes que representa la fracción 1/3, podrían ser asumidas como la fracción cuatro doceavos y 4) ün cuadrito es la diferencia que hay entre las dos [fracciones 1/3 y 1/4]". De todo lo anterior, los estudiantes llegaron a la conclusión que para encontrar la primera de las fracciones que a la vez fuesen mayores que 1/4 y menores que 1/3 bastaba con "unir a tres cuadritos [es decir 1/4 de la figura] un pedacito de cuadrito [una fracción menor a 1/12]".

A continuación, los integrantes del grupo G1 tomaron la decisión que el pedacito de "cuadrito"fuera de forma triangular y representara la mitad del "cuadrito"(mitad de un doceavo de la figura). Así, los estudiantes ya habían encontrado, por lo menos figuralmente, una primera fracción que cumplía con la condición exigida. Pero, debían ir más allá, pues era necesario representarla en escritura aritmética, es decir aplicar una conversión del registro figural al aritmético, para alcanzar tal propósito, procedieron de la siguiente manera: mediante la introducción de nuevos trazos auxiliares reorganizaron perceptualmente e internamente la tercera de las figuras (figura dividida en 12 partes), descomponiéndola ahora en 24 partes iguales en forma y cantidad de superficie que el "pedacito.[el]egido por ellos. De esta manera, según ellos, se pudieron dar cuenta de dos cosas: 1) que la mitad de un doceavo correspondía a un veinticuatroavo y 2) que un cuarto era "igual.[a] seis veinticuatroavos. En consecuencia, concluyeron que "la parte pintada era igual a seis veinticuatroavos más un veinticuatroavo [es decir] siete veinticuatroavos".

La profesora al hacerles caer en la cuenta a todos los estudiantes de que sólo habían encontrado una de las diez fracciones pedidas y preguntarles cómo pensaban encontrar otra fracción que cumpliera con la condición exigida, la mayoría de los estudiantes al unisonó gritaron "partir el triangulito por la mitadz al repetir la pregunta, una vez más, aludiendo al resto de las fracciones, algunos de los estudiantes respondieron "partirlos de nuevo en pedazos más y más pequeñas".

3. Conclusión:

La visualización juega un papel determinante para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en general, de la geometría en particular, a la vez que es un acto cognitivo complejo, no espontáneo y susceptible de enseñanza. Teniendo en cuenta informes como el presente sumado a las dificultades de naturaleza figural encontradas por nuestros estudiantes colombianos al presentar pruebas nacionales e internacionales de matemáticas (Marmolejo 2005a; MEN, 1998) y a la marcada insistencia a nivel internacional (Villani, 1998; Presmeg, 2006) a considerar la visualización como un objeto de estudio en los currículos escolares, es, pues, necesario y urgente adelantar estudios que en nuestro medio evalúen el papel que juega esta importantísima actividad cognitiva en las apuestas de enseñanza privilegiadas en las aulas escolares por los educadores colombianos, en los materiales didácticos empleados por ellos al diseñar e implementar sus clases de matemáticas y al evaluar el aprendizaje alcanzado en ellas, en los ítems de evaluación que conforman las pruebas externas (tanto nacionales como internacionales) en las que participan nuestros estudiantes de Educación Básica y Media. Igualmente, no menos importante, es el llamado de atención a las instituciones universitarias colombianas con Programas de Licenciatura en Matemáticas a reflexionar y analizar sobre el rol que debe jugar la visualización tanto en sus programas de formación de futuros educadores matemáticos, como de cualificación de maestros de matemáticas en ejercicio.

Referencias

[1] Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de lapprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnenments et coordination des leurs fonctionnenments. Annales de didactique et sciences cognitives, 10, 5-53.

[2] Duval, R. (2003) Voir en mathématiques. En Filloy. (Ed.), Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. Mexico, 41-76.

[3] Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizaje intelectuales. Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo, (1.ª ed.). Colombia: Artes Gráficas Univalle.

[4] Duval, R. (1998). Geometry desde una perspectiva cognitiva. En, Mammana y Villani (Eds). Perspectives on the teaching of geometry for the 21th century. An ICMI Study. Vol. V. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

[5] Duval, R., (1995). Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processing, in Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education (Sutherlan & Mason Eds), Springer, 142-157.

[6] Kline, M. (1986). El Fracaso de la matemática moderna: ¿por qué Juanito no sabe sumar?. (11ma. Ed.) Madrid: Siglo XXI Editores.

[7] Marmolejo, G. y Vega, M.(2011). La Visualización en las Figuras Geométricas un Asunto Complejo y de Importancia en el Aprendizaje de la Geometría en la Educación Básica. Enviado.

[8] Marmolejo, G. y Vega, M.(2003). Figuras y Visualización. Video didáctico sobre la complejidad existente en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras. Producto de la articulación entre las investigaciones Enunciación y Significación de las Matemáticas en la Educación Básica y Construcción del Área de Superficies Planas Desde una Perspectiva Semiótica: Factores de Visibilidad y Procesos de Visualización.

[9] Marmolejo, G., Guzman, L.(2011). Introducción a las fracciones en los textos escolares de educación básica ¿figuras representaciones estáticas o dinámicas? En proceso.

[10] Marmolejo, G.(2010). Papel de la visualización en la enseñanza del área de superficies planas en España y Colombia. Análisis de textos escolares y su aplicación en el aula de clase. Proyecto de investigación en curso. Universidad de Salamanca. Salamanca. España

[11] Marmolejo, G.(2007). Algunos Tópicos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras. Procesos de visualización y factores de visibilidad. Tesis de magister no publicada. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

[12] Marmolejo, G. y otros (2005a). Análisis del Tópico de Geometría y Medición. Publicado en Pruebas Censales y Formación de Pensamiento Matemático en la escuela. Cali. Colombia: El Bando Creativo, 27-44.

[13] Marmolejo, G. (2005b). Procesos de Visualización en el Desarrollo de Pensamiento Espacial y Métrico. Revista Redma No3, Cali. Colombia: El Bando creativo, 25-28.

[14] Ministerio de Educación Nacional. (1998). Análisis y Resultados de las pruebas de Matemáticas-T.I.M.S.S./96. Colombia. Santafé de Bogotá: Creamos Alternativas.

[15] Padilla, V (1992). L´influence d´une acquisition de traitementes purement figuraux pour l´apprentissage des Mathematiques. Thèse U.L.P. Strasbourg, Francia.

[16] Presmeg, N.(2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En Gutierrez, P. Boero (eds), Handbook on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future, Sense Publishers, 205-235.

[17] Rock, I. (1985). La Percepción. Traducción realizada por Garcia de la Mora (1.ª ed.). España: Editorial Labor.

[18] Villani, V.(1998). Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. En, Mammana y Villani (Eds). Perspectives on the teaching of geometry for the 21th century. An ICMI Study. Vol. V. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 337-346

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño
e-mail: usalgamav@gmail.com